ENS de LYON
Filière MP - Session 1967
Durée : 4 heures

Correction

1. (a) D'après le cours, on sait que

$$P = b_0(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + ... + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}X + (-1)^n\sigma_n)$$

avec les relations $\sigma_k = (-1)^k \dfrac{b_k}{b_0}$ $(1 \le k \le n)$ et que

$$P_i = b_0\left(X^{n-1} - \sigma_1^{(i)} X^{n-1} + ... + (-1)^{n-2}\sigma_{n-2}^{(i)}X + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}^{(i)}\right).$$

La division euclidienne de P par $X - \beta_i$ donne

$$\begin{aligned}\frac{P}{X-\beta_i} &= b_0(X^{n-1} + (\beta_i - \sigma_1)X^{n-2} + (\beta_i^2 - \sigma_1\beta_i + \sigma_2)X^{n-2} \\ &+ ... + (\beta_i^{n-1} - \sigma_1\beta_i^{n-2} + ... + (-1)^{n-2}\sigma_{n-2}\beta_i + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1})).\end{aligned}$$

D'où, par identification des coefficients :

$$\begin{aligned}\sigma_1^{(i)} &= -\beta_i + \sigma_1 \\ \sigma_2^{(i)} &= \beta_i^2 - \sigma_1\beta_i + \sigma_2 \\ &\vdots \\ \sigma_{n-1}^{(i)} &= (-1)^{n-1}(\beta_i^{n-1} - \sigma_1\beta_i^{n-2} + ... + (-1)^{n-2}\sigma_{n-2}\beta_i + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1})\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \beta_i + \sigma_1^{(i)} \\ \sigma_2 &= \sigma_1^{(i)}\beta_i + \sigma_2^{(i)} \\ &\vdots \\ \sigma_k &= \sigma_{k-1}^{(i)}\beta_i + \sigma_k^{(i)} \\ &\vdots \\ \sigma_{n-1} &= \sigma_{n-2}^{(i)}\beta_i + \sigma_{n-1}^{(i)} \\ \sigma_n &= \beta_i\sigma_{n-1}^{(i)}\end{aligned}$$

En sommant l'égalité précédente pour $i = 1$ à $i = n$, on obtient :

$$\begin{aligned}P' &= \sum_{i=1}^{n} P_i \\ &= X^{n-1} + (S_1 - n\sigma_1)X^{n-2} + (S_2 - \sigma_1 S_1 + n\sigma_2)X^{n-2} + ... \\ &\quad + (S_{n-1} - \sigma_1 S_{n-2} + ... + (-1)^{n-2}\sigma_{n-2}S_1 + (-1)^{n-1}n\sigma_{n-1})\end{aligned}$$

Mais $P' = b_0(nX^{n-1} - (n-1)\sigma_1 X^{n-2} + ... + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1})$. Par identification des coefficients, on trouve, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} + ... + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0 \quad (*).$$

Or pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sigma_k = (-1)^k \dfrac{b_k}{b_0}$, on obtient donc, par substitution, la relation demandée :

$$b_0 S_k + b_1 S_{k-1} + ... + b_{k-1}S_1 + kb_k = 0.$$

(b) Les relations $(*)$ de la question précédente ($k = 1, 2, ..., n$) définissent un système triangulaire inversible en $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, on peut donc exprimer $S_1, S_2, ..., S_n$ en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ et inversement.

(c) On remarque que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 = \beta_i^k P(\beta_i) = b_0(\beta_i^{k+n} - \sigma_1 \beta_i^{k+n-1} + ... + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}\beta_i^{k+1} + (-1)^n \sigma_n \beta_i^k),$$

et en sommant cette égalité pour $i = 1$ à n, on obtient :

$$0 = S_{k+n} - \sigma_1 S_{k+n-1} + ... + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}S_{k+1} + (-1)^n \sigma_n S_k.$$

ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad b_0 S_{k+n} + b_1 S_{k+n-1} + ... + b_{n-1}S_{k+1} + b_n S_k = 0.$$

2. Notons $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ les racines non nulles de P de tel sorte que $P(x) = b_0 x^{n-r} \prod_{i=1}^{r}(x - \beta_i)$, de même on pose $Q(x) = c_0 x^{m-s} \prod_{i=1}^{s}(x - \alpha_i)$ avec $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ les racines non nulles de Q. D'après la question précédente, les $\sigma_k(P)$ s'expriment en fonction des sommes de Newton $S_k(P)$. On peut donc exprimer les coefficients du polynôme $\prod_{i=1}^{r}(x-\beta_i)$ en fonction des $S_k(P)$ et comme $\forall k \in \mathbb{N},\ \ S_k(P) = S_k(Q)$, on obtient donc l'égalité $\prod_{i=1}^{r}(x - \beta_i) = \prod_{i=1}^{s}(x - \alpha_i)$, donc nécessairement $s = r$ et par conséquent

$$c_0 x^m P = b_0 c_0 x^m x^{n-r} \prod_{i=1}^{r}(x - \beta_i) = b_0 c_0 x^n x^{m-s} \prod_{i=1}^{s}(x - \beta_i) = b_0 x^n Q.$$

3. (a) Soient $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le p}$ et $Y = (y_{ij})_{1 \le i,j \le p}$ deux matrices de $\mathscr{M}_p$. Posons $Z = XY = (z_{ij})_{1 \le i,j \le p}$ et $T = YX = (t_{ij})_{1 \le i,j \le p}$, avec $z_{ij} = \sum_{k=1}^{p} x_{ik}y_{kj}$ et $t_{ij} = \sum_{k=1}^{p} y_{ik}x_{kj}$, donc :

$$\mathrm{tr}(XY) = \sum_{i=1}^{p} z_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{ik}y_{ki} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} y_{ki}x_{ik} = \sum_{k=1}^{p} t_{kk} = \mathrm{tr}(YX).$$

La famille $(E_{ij})_{1 \le i,j \le p}$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_p$. On rappelle que $E_{ij}E_{lk} = \delta_{jl}E_{ik}$ pour tout $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$. On a $\mathrm{tr}(E_{21}E_{11}E_{12}) = \mathrm{tr}(E_{22}) = 1$ alors que $\mathrm{tr}(E_{21}E_{12}E_{11}) = \mathrm{tr}(0) = 0$. Il suffit donc de prendre $X = E_{21}$, $Y = E_{11}$ et $Z = E_{12}$.

(b) Soit $M \in \mathscr{M}_p$. On note f_A la forme linéaire définie par : $\forall X \in \mathscr{M}_p$, $f_M(X) = \mathrm{tr}(MX)$. Soit φ l'application de $\mathscr{M}_p$ dans $(\mathscr{M}_p)^*$ (dual de $\mathscr{M}_p$) définie par : $\forall M \in \mathscr{M}_p$, $\varphi(M) = f_M$, c'est une application linéaire. Montrons qu'elle est bijective, pour cela il suffit de montrer qu'elle est injective puisque $\dim(\mathscr{M}_p) = \dim(\mathscr{M}_p)^*$. Soit $M \in \mathscr{M}_p$ tel que $\varphi(M) = 0$, donc $f_M(X) = \mathrm{tr}(MX) = 0$ pour tout $X \in \mathscr{M}_p$, en particulier $\mathrm{tr}(ME_{ij}) = 0$ pour tout (i, j). Donc, si on pose $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le p}$,

$\mathrm{tr}(ME_{ij}) = m_{ji} = 0$, par conséquent $M = 0$, donc φ est injective.
Soit $f \in (\mathscr{M}_p)^*$, il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $f = f_M$ et donc pour tout X, Y de $\mathscr{M}_p$, $\mathrm{tr}(MXY) = \mathrm{tr}(MYX)$, en particulier, pour tout (i, j, k), $i \neq k$, on a :

$$\mathrm{tr}(ME_{ij}E_{jk}) = \mathrm{tr}(ME_{jk}E_{ij})$$

ou encore $\mathrm{tr}(ME_{ik}) = \mathrm{tr}(0) = m_{ik}$, donc M est une matrice diagonale. Maintenant pour (i, j) on a $\mathrm{tr}(ME_{ij}E_{ji}) = \mathrm{tr}(ME_{ji}E_{ij})$, c'est-à-dire $m_{jj} = m_{ii}$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M = \alpha I_p$. D'où $f = \alpha\,\mathrm{tr}$. Réciproquement, toute forme linéaire de cette forme répond au problème.

4. (a) Soit V un vecteur propre de X tel que $XV = \lambda V$, donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X^k V = \lambda^k V$, donc λ^k est un vecteur propre de X^k.
Réciproquement, soit λ une valeur propre de X^k et $V \neq 0$ tel que $X^k V = \lambda V$. Notons $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ les racines **complexes** du polynôme $x^k - \lambda$, on a donc

$$(X - \mu_1 I_p)(X - \mu_2 I_p)...(X - \mu_k I_p)V = 0.$$

Comme V est non nul, le produit des matrices $(X - \mu_1 I_p)(X - \mu_2 I_p)...(X - \mu_k I_p)$ n'est pas inversible et par suite il existe au moins un scalaire μ_{i_0} tel que $A - \mu_{i_0} I_p$ n'est pas inversible et donc μ_{i_0} serait une valeur propre de A.

(b) Toute matrice de $\mathscr{M}_p$ est trigonalisable, donc il existe P une matrice inversible et T triangulaire telles que

$$X = PTP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix} P^{-1}$$

et donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X^k = PT^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \dots & * \\ & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_p^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ceci montre que $\mathrm{tr}(X^k) = \mathrm{tr}(T^k) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_i^k$.

(c) Soit χ_X le polynôme caractéristique de X, on sait que les valeurs propres de X, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont exactement les racines de χ_X. On a :

$$\chi_X(x) = (-1)^n \left(x^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k x^{n-k} \right).$$

Posons $P = (-1)^n \chi_X$ et $B =^t \mathrm{Co}(xI_p - X)$. Les éléments de B sont des polynômes en x de degré $p - 1$, on écrit donc

$$B = x^{p-1}B_0 + x^{n-2}B_1 + ... + B_{p-1}$$

On sait que B et $xI_p - X$ sont liés par la relation

$$B(xI_p - X) = P(x)I_p$$

donc, on obtient en développant le produit de gauche dans $(*)$:

$$XB_{p-1} + x(XB_{p-1} - B_{p-2}) + ... + x^{n-1}(XB_1 - B_0) - x^n B_0 = P(x)I_p$$

Par identification, coefficient par coefficient, on obtient

$$\begin{aligned}
-B_0 &= I_p \\
B_1 - XB_0 &= -\sigma_1 I_p \\
B_2 - XB_1 &= \sigma_2 I_p \\
&\vdots \\
B_{p-1} - XB_{p-2} &= (-1)^{p-1}\sigma_{p-1} I_p \\
-XB_{p-1} &= (-1)^p \sigma_p I_p
\end{aligned}$$

En égalent les traces des matrices dans les relations précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}
-\operatorname{tr}(B_0) &= p \\
\operatorname{tr}(B_1) - \operatorname{tr}(XB_0) &= -\sigma_1 p \\
\operatorname{tr}(B_2) - \operatorname{tr}(XB_1) &= \sigma_2 p \\
&\vdots \\
\operatorname{tr}(B_{p-1}) - \operatorname{tr}(XB_{p-2}) &= (-1)^{p-1}\sigma_{p-1} p \\
-\operatorname{tr}(XB_{p-1}) &= (-1)^p \sigma_p p
\end{aligned}$$

D'autre part, on sait que la dérivée d'un déterminant $\det(\triangle)$ est le somme des déterminants obtenus en dérivant successivement chaque colonne de la matrice $\triangle$. Ici $\triangle = xI_n - X$, les dérivées ne portent que sur les termes de la diagonale principale. Les déterminants obtenus sont exactement les cofacteurs des éléments de la diagonale principale de $xI_n - X$, c'est-à-dire les éléments de diagonaux de la matrice B. En sommant on obtient la formule

$$\operatorname{tr}(B) = P'$$

D'où

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(B_0) &= p \\
\operatorname{tr}(B_1) &= -(p-1)\sigma_1 \\
\operatorname{tr}(B_2) &= (p-2)\sigma_2 \\
&\vdots \\
\operatorname{tr}(B_{p-1}) &= (-1)^{p-1}\sigma_{p-1}
\end{aligned}$$

On compare aux relations précédentes, d'où

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \operatorname{tr}(B_0X) = \operatorname{tr}(X) \\
\sigma_2 &= -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(B_1X) \\
&\vdots \\
\sigma_p &= (-1)^{p+1}\frac{1}{2}\operatorname{tr}(B_{p-1}X)
\end{aligned}$$

On multiplie par X chacune des égalités précédentes et l'on prend la trace. En tenant compte des dernières relations, on obtient :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(X) - \sigma_1 &= 0 \\
\operatorname{tr}(X^2) - \sigma_1 \operatorname{tr}(X) + 2\sigma_2 &= 0 \\
&\vdots \\
\operatorname{tr}(X^n) - \sigma_1 \operatorname{tr}(X^{n-1}) + ... + (-1)^{p-2}\sigma_{p-2}\operatorname{tr}(X) + p(-1)^p\sigma_p &= 0
\end{aligned}$$

D'où, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$:

$$\operatorname{tr}(X^k) - \sigma_1 \operatorname{tr}(X^{k-1}) + \sigma_2 \operatorname{tr}(X^{k-2}) + ... + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}\operatorname{tr}(X) + (-1)^k k\sigma_k = 0 \quad (*).$$

D'autre part, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$X^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sigma_k X^{n-k} = 0.$$

En multipliant par X^i et en prenant la trace, on obtient :

$$\operatorname{tr}(X^{n+i}) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sigma_k \operatorname{tr}(X^{n+i-k}) = 0.$$

Donc la suite $(\operatorname{tr}(X^k))_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux systèmes de la question 1, donc par unicité de la solution on a nécessairement $\operatorname{tr}(X^k) = S_k(P) = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

5. (a) Soit λ une valeur propre de A, alors il existe un vecteur X non nul tel que $BAX = \lambda X$ et donc $AB(AX) = \lambda(AX)$, le vecteur AX est non nul, car sinon on aura $\lambda X = 0$ ce qui est absurde, ceci permet de conclure que λ est une valeur propre de AB.

(b) Dans ce cas AB est non inversible si, et seulement si, BA est non inversible, car $\det(AB) = \det(BA)$, donc 0 est une valeur propre de AB si, et seulement si, 0 est une valeur propre de BA.

(c) On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on vérifie bien que 0 est un valeur propre de BA, mais 0 n'est pas valeur propre de AB. Le même exemple montre que, dans le cas général, $\det(AB) \neq \det(BA)$.

(d) Posons $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$. Notons $C = AB = (c_{ij})_{1\le i,j\le m}$ et $D = BA = (d_{ij})_{1\le i,j\le n}$, avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ et $d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}$, donc :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \operatorname{tr}(BA).$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}^*$. Alors d'après le résultat précédent, on peut écrire :

$$\operatorname{tr}[(AB)^k] = \operatorname{tr}[A(BA)^{k-1}B] = \operatorname{tr}[BA(BA)^{k-1}] = \operatorname{tr}[(BA)^k].$$

(e) D'après la question 1, on peut exprimer les coefficients du polynôme caractéristique $\chi_{AB} = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$ de AB en fonction des sommes de Newton $S_k = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^k = \operatorname{tr}[(AB)^k]$. Il en de même pour BA, et comme $\operatorname{tr}[(AB)^k] = \operatorname{tr}[(BA)^k]$, on obtient par la question 2. l'égalité :

$$(-X)^n \chi_{AB} = (-X)^m \chi_{BA}.$$

6. (a) Si $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on pose $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ où $B_1 \in \mathscr{M}_r$, $B_2 \in \mathscr{M}_{r,n-r}$ $B_3 \in \mathscr{M}_{m-r,r}$ et $B_4 \in \mathscr{M}_{m-r,n-r}$. Alors a $AB = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_m$ et $BA = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n$. D'où $\chi_{AB}(X) = \chi_{B_1}(X)(-X)^{m-r}$, de même on trouve $\chi_{BA}(X) = \chi_{B_1}(X)(-X)^{n-r}$.
On a donc

$$(-X)^n \chi_{AB}(X) = (-X)^m \chi_{BA}(X).$$

(b) Dans le cas général où $A \neq 0$, A est équivalente à la matrice $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $r = \mathrm{rg}(A)$, donc il existe $P \in \mathbf{GL}_m$ et $Q \in \mathbf{GL}_n$ des matrices inversibles telles que $A = P^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$.

Écrivons $B = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P$ où $B_1 \in \mathscr{M}_r$, $B_2 \in \mathscr{M}_{r,n-r}$ $B_3 \in \mathscr{M}_{m-r,r}$ et $B_4 \in \mathscr{M}_{m-r,n-r}$. On a $AB = P^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$ et $BA = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix} Q$. D'où $\chi_{AB}(X) = \chi_{B_1}(X)(-X)^{m-r}$, de même on trouve $\chi_{BA}(X) = \chi_{B_1}(X)(-X)^{n-r}$, et par conséquent

$$(-X)^n \chi_{AB}(X) = (-X)^m \chi_{BA}(X).$$

On en déduit que les valeurs propres non nulles de AB et de BA ont la même ordre de multiplicité. Lorsque $n = p$, on trouve l'égalité des polynômes caractéristiques de AB et BA.

• • • • • • • • • • •